SF1624 Algebra och geometri

Sjuttonde föreläsningen

Mats Boij

Institutionen för matematik
KTH

25 november, 2009

Invers avbildning

Definition (Invers avbildning)

Om T är en linjär avbildning från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^n$ säger vi att T är *inverterbar* om det finns en avbildning S som uppfyller

$$S \circ T = \text{Id} = T \circ S,$$

dvs att $S(T(\overline{u})) = \overline{u} = T(S(\overline{u}))$, för alla $\overline{u}$ i $\mathbb{R}^n$.

Exempel

- En rotation i planet med en vinkel θ är inverterbar eftersom vi kan rotera tillbaka med samma vinkel åt andra hållet.
- En projektion på ett plan i $\mathbb{R}^3$ är inte invererbar, eftersom bilden alltid ligger i planet och inte kan vara lika med $\overline{u}$ för alla $\overline{u}$ i $\mathbb{R}^3$.

Inversen är linjär

Sats

Om T är en linjär avbildning från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^n$ med matris A är T inverterbar precis då $\det(A) \neq 0$ och inversen $S = T^{-1}$ är en linjär avbildning.

Bevis.

Att T är inverterbar betyder att ekvationen $T(\overline{u}) = \overline{v}$ har en unik lösning, $S(\overline{v})$, för varje $\overline{v}$ i $\mathbb{R}^n$. Det finns en unik lösning för varje högerled precis om $\det(A) \neq 0$.
Vi har att $S(\overline{v}_1 + \overline{v}_2) = S(\overline{v}_1) + S(\overline{v}_2)$ eftersom

$$T(S(\overline{v}_1+\overline{v}_2)) = \overline{v}_1+\overline{v}_2 = T(S(\overline{v}_1))+T(S(\overline{v}_2)) = T(S(\overline{v}_1)+S(\overline{v}_2))$$

och $T(\overline{u}_1) = T(\overline{u}_2) \Longrightarrow \overline{u}_1 = \overline{u}_2$. På samma sätt får vi att $S(a\overline{v}) = aS(\overline{v})$ eftersom

$$T(S(a\overline{v})) = a\overline{v} = aT(S(\overline{v})) = T(aS(\overline{v})).$$

Inversmatris

Eftersom inversen till en linjär avbildning också är linjär kan den beskrivas med en matris.

Definition

Om A är en kvadratisk matris med $\det(A) \neq 0$ som beskriver en linjär avbildnng T så är den *inversa matrisen* A^{-1} den matris som hör till den inversa avbildningen, T^{-1}. Vi säger då att matrisen A är *inverterbar*

Sats

Om A och B är inverterbara matriser gäller att

- *AB är inverterbar*
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Bevis.

- $\det(AB) = \det(A)\det(B) \neq 0 \quad (\det(A) \neq 0$ och $\det B \neq 0.)$
- $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$ och $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A((BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I.$

Att beräkna inversmatriser

Vi har redan sett tidigare i kursen att vi kan använda Gausselimination för att beräkna A^{-1} om den existerar.

Sats

Om A är inverterbar är $(I|A^{-1})$ den reducerade trappstegsformen av matrisen $(A|I)$.

Exempel

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

och vi ser att

$$\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Invers med Cramers regel

Vi kan använda Cramers regel för att bestämma en formel för inversmatrisen med hjälp av determinanter.

Sats

Om A är inverterbar ges inversen av

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{Adj} A$$

där

$$(\operatorname{Adj} A)_{i,j} = (-1)^{i+j} \det(\hat{A}_{j,i})$$

och $\hat{A}_{j,i}$ är matrisen som fås från A genom att ta bort rad j och kolonn i.

Exempel

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} \det(d) & -\det(b) \\ -\det(c) & \det(a) \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$